طيف المؤثرات الخطية في الفضاءات الجزئية اللامتغيرة

سمية عمر باكير
قسم الرياضيات - كلية العلوم – جامعة مصراته

الملخص :

تضمنت هذه الورقة دراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمؤثرات الخطية ، تعريفها ، خصائصها واستقلاليتها والتعرف علي فضائها الذاتي ،ومتي يكون الفضاء الجزئي فضاء جزئي لامتغير تحت تأثير المؤثرات الخطية يحتفظ بجميع خواص الفضاء الأصلي ، هذا الفضاء الذي غالبا مايختزل المؤثرات الخطية تحت شروط معينة وتعرفنا علي علاقته بالطيف ، حيث وجدنا أن طيف المؤثر المختزل هو مجموعة جزئية من الطيف الكامل للمؤثر الخطي

الكلمات المفتاحية : الفضاءات الجزئية اللامتغيرة ، طيف المؤثرات الخطية ، القيم الذاتية ،المتجهات الذاتية ، المؤثرات المختزلة

،

-

المقدمة Introduction

طيف المؤثرات الخطية هو مجموعة كل القيم الذاتية المناظرة للمتجهات الذاتية للمؤثرات الخطية التي تم دراستها في هذه الورقة والتعرف علي بعض خصائصها ، و تعرفنا علي الفضاءات الجزئية اللامتغيرة تحت تأثير المؤثرات الخطية ، حيث أن الفضاء الجزئيM من X الذي يحقق الشرط $T(M) \subseteq M$ يكون فضاء جزئي لامتغير تحت T ، وعرضنا بعض الفضاءات الجزئية التي ينطبق عليها هذا الشرط وبعض صفاتها الجبرية ، ومتي يكون للمؤثر الخطي فضاء ذاتي أحادي أو ثنائي البعد في الفضاءات المختلفة ، حيث أن هذه الفضاءات الجزئية تختزل المؤثرات الخطية القابلة للاختزال تحت شروط معينة ، وتعرفنا علي علاقتها بطيف المؤثرات المختزلة ، كما وجدنا أن طيف المؤثرات الخطية هو دائما قيمة حقيقية ...

طيف المؤثرات الخطية في الفضاءات الجزئية اللامتغيرة The Spectral Of Linear Operators In Invariant Subspaces

1.. القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمؤثرات الخطية

تعريف 1.1

إذا كان X فضاءاً اتجاهياً علي المجال K و $T \in L(X)$ ، حيث X فضاء اتجاهي منتهي البعد ، $L(X)$ فضاء كل المؤثرات الخطية المحدودة من الفضاء النظيمي X الي نفسه وهو فضاء اتجاهي نظيمي ، نقول أن $\lambda \in K$ قيمة ذاتية (*Eigenvalue*) للمؤثر الخطي T إذا وجد متجه غير صفري $u \in K$ بحيث $T(u) = \lambda u$ يسمي u في هذه الحالة متجه ذاتي (*Eigenvector*) يناظر القيمة الذاتية λ .

مثال 1

إذا كان $T: R^2 \to R^2$ معرف بواسطة العلاقة $T(x,y) = (4x, 0)$ فإن $\lambda = 4$ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي T يناظر المتجه الذاتي $(1,0)$ ، حيث $T(1,0) = (4,0) = 4(1,0)$.

المبرهنة التالية تعطي شرط وجود القيمة الذاتية للمؤثر الخطي

مبرهنة [1] 1.1 [11]

إذا كان T مؤثر خطي حيث $T \in L(X)$ و $\lambda \in K$ ، فإن λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي T إذا وفقط إذا كان $|T - \lambda I| = 0$.

البرهان : نفرض أن λ قيمة ذاتية للمؤثر T ، بالتالي يوجد $u \neq 0$ بحيث $Tu = \lambda u$ وبالتالي $(T - \lambda I)u = 0$ ومنها يكون $T - \lambda I$ مصفوفة شاذة أي أن $|T - \lambda I| = 0$.

بفرض أن $|T - \lambda I| = 0$ فإن المنظومة $(T - \lambda I)\, X = 0$ يوجد لها أكثر من حل ، وبالتالي يوجد $u \neq 0$ حيث $Tu = \lambda u$ ومنها يكون λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي T .

بعض خصائص المتجهات الذاتية نوضحها في هذه المبرهنة :

مبرهنة [2] 2.1 [6]

إذا كان u متجه ذاتي للمؤثر T يناظر القيمة الذاتية λ :

1) إذا كان $\alpha \neq 0$ عدد قياسي ، فإن αu يكون متجه ذاتي أيضاً للمؤثر T ويناظر القيمة الذاتية λ نفسها .

2) u لا يمكن أن يناظر أكثر من قيمة ذاتية واحدة للمؤثر T .

البرهان :

1) حيث أن u متجه ذاتي للمؤثر T يناظر القيمة الذاتية λ يكون $u \neq 0$: $Tu = \lambda u$

$\therefore\ T(\alpha u) = \alpha T u = \alpha \lambda u = \lambda(\alpha u) \implies$ αu متجه ذاتي

2) نفرض أن λ_1, λ_2 قيمتان ذاتيتان مختلفتان للمؤثر T مناظرتان للمتجه الذاتي u فيكون :

$$Tu = \lambda_1 u\ , Tu = \lambda_2 u \implies \lambda_1 u = \lambda_2 u \implies (\lambda_1 - \lambda_2)u = 0$$

$$\because u \neq 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2$$

المبرهنة الآتية توضح أن المؤثر T ومرافقه T^* لهما نفس القيمة الذاتية .

مبرهنة [3] 3.1 [1]

إذا كان T مؤثر ناظمي على فضاء هلبرت H له قيمة ذاتية λ ، فإن $u \in H$ متجه ذاتي للمؤثر T يناظر القيمة الذاتية λ إذا وفقط إذا كان u متجه ذاتي للمؤثر المرافق T^* يناظر القيمة الذاتية $\bar{\lambda}$.

تعريف 2.1

إذا كان X فضاء اتجاهي منتهي البعد على المجال K و $\lambda \in K$ ، فإن M_y يسمى الفضاء الذاتي ($Eigenspace$) يناظر للقيمة الذاتية λ ، ويعرف بالصيغة : $M_y = \{u \in X : T(u) = \lambda u\}$ من ذلك مجموعة المتجهات الذاتية التي تناظر للقيم الذاتية λ والمتجه الصفري تكون الفضاء الاتجاهي الذاتي M_y .

مبرهنة[4] 4.1 [11]

إذا كان $T \in L(X)$ ، λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي T ، فإن الفضاء الذاتي M_y المناظر للقيمة الذاتية λ فضاء جزئي من X .

البرهان : نفرض أن $\alpha \in k$, $u, v \in M_y$ حيث الفضاء $M_y \neq \emptyset$ فإن :

$$\therefore\ T(\alpha u + v) = \alpha T u + T v = \alpha \lambda u + \lambda v = \lambda(\alpha u + v)$$

$$\implies \alpha u + v \in M_y \implies M_y \subseteq X .$$

من ضمن خصائص المتجهات الذاتية انها تحقق الاستقلال الخطي كما موضح بالمبرهنة :

مبرهنة [5] 5.1 [2,7,11]:

إذا كان $T \in L(X)$ فإن المتجهات الذاتية $u_1, u_2, \dots, u_n$ المناظرة لقيم ذاتية مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ للمؤثر الخطي T تكون مجموعة مستقلة خطياً .

البرهان : بفرض أن $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ غير مستقلة خطياَ ، ولنفرض أن u_t متجه يمكن كتابته كتركيبة خطية كالآتي :

$$u_t = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{t-1} u_{t-1} \quad \to (1)$$

من ذلك فإن $\{u_1, u_2, \dots, u_{t-1}\}$ مستقلة خطياً ، نضرب طرفي العادلة في $(T - \lambda_t I)$ نجد أن :

$$(T - \lambda_t I) u_t = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i (T - \lambda_t I)\, u_i = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i (\lambda_i u_i - \lambda_t u_i) = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_t)\, u_i = 0$$

وحيث أن المتجهات في الطرف الأيمن مستقلة خطياً فهذا يعني أن :

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad ; \quad \lambda_i - \lambda_t \neq 0 \qquad : i = 1,2,\dots,t$$

ومنها يكون $u_t = 0$ من المعادلة (1) وهذا يناقض الفرض كون $u_t \neq 0$ حيث u_t متجه ذاتي ، ومن ذلك تكون مجموعة المتجهات مستقلة خطياً .

2. الفضاءات الجزئية اللامتغيرة

الفضاءات الجزئية اللامتغيرة من أحد المواضيع المهمة في عالم الرياضيات والتي لها تاريخ طويل من الأبحاث والدراسات نتعرف عليها وعلي بعض خصائصها وماعلاقتها بالقيم الذاتية والمتجهات الذاتية ...

تعريف 1.2

نفرض أن T مؤثر خطي على الفضاء الاتجاهي X أي أن $T: X \to X$ إذا كان M فضاء جزئي في X حيث $T(M) \subseteq M$ ، فإن M فضاء جزئي لا متغير تحت T (*T-Invariant*)

أي أن $T(x) \in M$ لكل $x \in M$.

يمكن القول أن الفضاء الجزئي اللامتغير هو الفضاء الذي يصبح راسم لنفسه .

مثال 2

نفرض أن $T \in L(X)$ نلاحظ أن $\{0\}$ ، (*Range T*) ، (*null T*) والفضاء X نفسه ، جميعها تكون فضاءات جزئية لا متغير تحت T .

المبرهنة التالية توضح أن الفضاء المتولد بالمتجهات الذاتية للمؤثر T هو فضاء جزئي لامتغير تحت T

مبرهنة [6] 1.2 [7,9]

نفرض أن $T \in L(X)$ ، $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تشير إلي قيم ذاتية مختلفة للمؤثر T ، وأن u_i متجهات ذاتية تناظر القيمة الذاتية λ_i لكل $(i = 1,2,\dots,n)$ ، فإن $span\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ فضاء جزئي لا متغير تحت T .

الفضاء الذاتي المتكون من جميع المتجهات الذاتية للمؤثر T يكون أيضاَ فضاء جزئي لا متغير تحت T

مبرهنة[7] 2.2 [7]

ليكن T مؤثراَ خطياَ محدوداَ علي فضاء هلبرت H ، M_λ الفضاء الذاتي للمؤثر T والمناظر للقيمة الذاتية λ هو فضاء جزئي اتجاهي مغلق في H لا متغير تحت تأثير T (*T-Invariant*) .

البرهان : من تعريف M_λ ، $u \in M_\lambda$ إذا وفقط إذا كان $Tu = \lambda u$ ، وبفرض أن $0 \in M_\lambda$ ، فإن 0 يحقق العلاقة السابقة ، إذاَ من تعريف M_λ لدينا أن :

$$M_\lambda = \{u \in M_\lambda : Tu = \lambda u\} = \{u \in M_\lambda : (T - \lambda I)u = 0\}$$

وبما أن T, I مؤثرات مستمرة ، فإن M_λ يكون الفضاء الصفري (*Null space*) للمؤثر الخطي المستمر $(T - \lambda I)$ ، بذلك يكون M_λ مغلق ، لبرهان أن M_λ لا متغير تحت تأثير T ، نفرض أن $u \in M_\lambda$ فيكون $Tu = \lambda u$. وبما أن M_λ فضاء اتجاهي جزئي من H يكون $Tu = \lambda u \in M_\lambda$ وبذلك M_λ لا متغير تحت تأثير T .

الفضاءات الجزئية اللامتغيرة لها خواص جبرية عديدة نوضح بعضاَ منها في المبرهنات الآتية :

مبرهنة [8] 3.2 [7]

نفرض أن $T \in L(X)$ وأن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تشير إلي قيم ذاتية مختلفة للمؤثر T ، وأن X له أساسية تحتوي المتجهات الذاتية للمؤثر T [$(u_1, \dots, u_n)$ أساسية للفضاء V].

فإنه يوجد فضاءات جزئية أحادية البعد ($M_1, \dots, M_n$) في X كل منها لا متغير تحت T تحقق العلاقة الآتية :

$$V = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

البرهان : حيث أن X له أساسية $(u_1, \dots, u_n)$ تحتوي متجهات ذاتية للمؤثر T ، إذاَ لكل j ، نفرض أن $M_j = span(u_j)$ ، واضح أن لكل M_j فضاء جزئي احادي البعد في X يكون لا متغير تحت T (u_j هو متجه ذاتي للمؤثر T) ، حيث أن ($u_1, \dots, u_n$) تكون أساسية لـ X ، فإن كل متجه في X يمكن أن يكتب كتركيبة خطية من $(u_1, \dots, u_n)$ ، (أي أن كل متجه في X يمكن كتابته كمجموع $(m_1 + \dots + m_n)$) حيث كل $m_j \in M_j$ وبالتالي يكون : $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$

مبرهنة [9] 4.2 [4]

ليكن $M_1 , M_2 \subset X$ فضاءان جزئيان لا متغيران تحت المؤثر T فإن :
$M_1 \cap M_2$, $M_1 + M_2$ تكون فضاءات جزئية لا متغيرة تحت المؤثر T .

مبرهنة[10] 5.2 [4]
كل مؤثر خطي في الفضاء المركب ¢ منتهي البعد له متجه ذاتي واحد على الأقل ،
وله فضاء جزئي لا متغير أحادي البعد .

مبرهنة [11] 6.2 [12]
كل مؤثر خطي في الفضاء الحقيقي X منتهي البعد له متجه ذاتي واحد أو فضاء جزئي لامتغير ثنائي البعد .
البرهان : إذا كانت المعادلة المميزة لها جذور حقيقية بالتالي فإن المتجه الذاتي موجود .
لنفرض أن المعادلة المميزة لها جذور مركبة $\lambda = a + b_i$ ولنفرض أن $f = u + v_i$ تناظر المتجه الذاتي λ حيث $u, v \in X$ ولنفرض أن u, v مستقلة خطيا . نفرض العكس (غير مستقلة) أي أن $u = kv$ بالتالي من العلاقة $Tf = \lambda f$ نجد أن $T\big((k+i)v\big) = \lambda\big((k+i)v\big)$ أو أن $Tv = \lambda v$ ، حيث أن λ قيمة حقيقية هذا يناقض عدم وجود القيمة الذاتية بالإضافة لذلك لدينا:

$$T(u + v_i) = (a + b_i)\,(u + v_i)$$

أو أن

$$Tu + (Tv_i) = (au - bv) + (bu + av)i$$

منها يكون

$$Tu = (au - bv) \quad \text{و} \quad Tv = bu + av$$

وهذا يعني أن المؤثر T له فضاء جزئي لا متغير ثنائي البعد متوافق مع التركيبة الخطية للعناصر u, v حيث :

$$T(\xi u + \eta v) = \xi\, Tu + \eta\, Tv = \xi(au - bv) + \eta(bu + av)$$
$$= (\xi a + \eta b)u + (\eta a - \xi b)v \quad .$$

والفضاءات الجزئية اللامتغيرة في فضاء باناخ تختلف عنها في الفضاء المركب هذا ما يتوضح لنا في المبرهنة التالية :

مبرهنة[12] 7.2 [10]
لنفرض أن X فضاء باناخ منتهي البعد وأن $T : X \to X$ مؤثر خطي ، فإن T له فضاء جزئي لا متغير غير بديهي إذا وفقط إذا كان $n \geq 3$ أو $n = 2$ و T له قيمة ذاتية .
البرهان : إذا كان $n = 0$ أو $n = 1$ فإن الفضاء الجزئي الوحيد للفضاء X هو $\{0\}$ و X ولذلك T ليس له فضاء جزئي لا متغير غير بديهي ، في حالة $n = 2$ الفضاء الجزئي غير البديهي الوحيد من X من البعد 1 ، وجود الفضاء الجزئي لا متغير من البعد 1 للمؤثر T يعادل وجود قيمة ذاتية لـ T .
إذا كان $n \geq 3$ فإن T له فضاء جزئي لا متغير M من البعد 1 أو 2 (من المبرهنة السابقة) حيث أن بعد M يختلف عن بعد $\{0\}$ و X بذلك يكون فضاء جزئي غير بديهي .

ملاحظة : من **المبرهنة (5.2)** أي مؤثر خطي في الفضاء المركب ثنائي البعد له قيمة ذاتية ،هذا غير صحيح للمؤثرات في الفضاءات الحقيقية ثنائية البعد ، كما يوضح المثال الآتي :

مثال 3
نعرف المؤثر T_θ الذي يدور أي متجه $x = (x_1, x_2)$ في $\mathcal{R}^2$ بالزاوية θ عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل بالعلاقة $T_\theta x = (x_1 cos\theta - x_2 sin\theta, x_1 sin\theta + x_2 cos\theta)$
المؤثر T_θ صيغة محافظة ، بالتالي $\|T_\theta x\| = \|x\|$ ، لكل $x \in \mathcal{R}^2$ معرف بالصيغة $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ يترتب على ذلك القيم الذاتية المحتملة للمؤثر T هي $\lambda = 1 , \lambda = -1$ فقط ، في كلتا الحالتين المعادلة $T_\theta x = \lambda x$ للمتجه غير الصفري x تشير الى أن $sin\theta = 0$ وبالتالي T_θ له قيمة ذاتية إذا وفقط إذا كان θ مضاعفات π .

3) الطيف
تعريف 1.3
طيف المؤثر الخطي T (*Spectrum*) هو مجموعة جذور المعادلة $|T - \lambda I| = 0$ وهي معادلة حدودية من الدرجة n في λ ، أي أن طيف المؤثر T هو مجموعة كل القيم الذاتية للمؤثر T ولها الرمز $\sigma(T)$

، ومجموعة كل القيم المنتظمة λ للمؤثر T تسمي بالمجموعة الحالّه (*Resolvent Set*) للمؤثر الخطي T ولها الرمز $\rho(T)$ ، مكملة المجموعة الحالّه هي مجموعة الطيف للمؤثر T ، اي أن $\sigma(T) = ¢ - \rho(T)$ ، والقيمة $\lambda \in \sigma(T)$ تسمي قيمة طيفية للمؤثر T .

تعريف 2.3 :

إذا كان $\lambda \in ¢$ عدد مركب ، I المؤثر المحايد علي $D(T)$ ، يرمز للمؤثر $(T - \lambda I)$ بالرمز T_λ ومعكوسه بالرمز R_λ .

تعريف 3.3 (أنواع الطيف)

الطيف له ثلاثة أنواع وهى :

1) **الطيف النقطي (*The Point Spectrum*):** الطيف النقطي أو المتقطع وهو مجموعة القيم λ التي يكون عندها المؤثر $R_\lambda(T)$ غير موجود ، ويرمز له بالرمز $\sigma_P(T)$ حيث $\lambda \in \sigma_P(T)$ تسمي قيمة ذاتية للمؤثر T ، أي أن :

$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in ¢ : Ker (T - \lambda I) \neq \{0\} \}$$

2) **الطيف المتصل (*The Continuous Spectrum*) :** الطيف المتصل هو مجموعة القيم λ التي تحقق أن المؤثر المحلل $R_\lambda(T)$ موجود ومعرف علي مجموعة كثيفة في فضاء هلبرت H ولكنه ليس محدود وله الرمز $\sigma_c(T)$.

3) **الطيف المتبقي (*The Residual Spectrum*) :** الطيف المتبقي هو مجموعة القيم λ التي يكون عندها المؤثر $R_\lambda(T)$ موجود ونطاقه ليس مجموعة كثيفة في فضاء هلبرت H سواء أكان محدود أو غير محدود وله الرمز $\sigma_r(T)$ من ذلك يكون :

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \quad , \quad ¢ = \sigma(T) \cup \rho(T)$$

المبرهنة التالية توضح أن الطيف هو قيمة حقيقية

مبرهنة[13] 1.3 [2]

الطيف $\sigma(T)$ لمؤثر خطي محدود ومترافق ذاتياً علي فضاء هلبرت لابد أن يكون حقيقي .

البرهان : إذا كان $\lambda = \alpha + i\beta$ حيث $\alpha , \beta \in \mathcal{R}$ أعداد حقيقية ، $\beta \neq 0$ ، $T_\lambda = (T - \lambda I)$

$$\langle T_\lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \ \ ; \ \forall x \in H \text{ ، } x \neq 0$$

$$\because \ \langle Tx, x\rangle, \langle x, x\rangle \in \mathcal{R} \implies \ \langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$$

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = \langle Tx, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, x\rangle$$

$$\therefore \ \overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} - \langle T_\lambda x, x\rangle = \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)\langle x, x\rangle = 2i\beta\|x\|^2 \qquad ; \ \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

$$\therefore \ -2i \ Im\langle T_\lambda x, x\rangle = 2i\beta\|x\|^2$$

بقسمة الطرفين علي $2i$ وأخذ القيمة المطلقة نجد أن :

$$|\beta| \ \|x\|^2 = |Im\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq |\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq \|T_\lambda x\| \ \|x\|$$

$$\because \|x\| \neq 0 \implies \quad |\beta| \ \|x\| \leq \|T_\lambda x\|$$

فإذا كان $\beta \neq 0$ ، فإن $\lambda \in \rho(T)$ ،

وإذا كان $\lambda \in \sigma(T)$ فيجب أن يكون $\beta = 0$ بذلك يكون λ قيمة حقيقية .

الفضاء الجزئي اللامتغير M هو فضاء مختزل حيث أنه يختزل المؤثر الخطي T بشروط يوضحها التعريف والمبرهنة الآتية :

تعريف 4.3

إذا كان M فضاء جزئي غير بديهي لا متغير تحت المؤثر T ، فإن M يختزل (*Reduce*) المؤثر الخطي T إذا كان كلاً من الفضاء الجزئي M و $M^\perp$ يكونان لا متغيران تحت المؤثر T ، طبعاً الفضاء M نفسه والفضاء الصفري يختزلان أي مؤثر خطي محدود .

مبرهنة[14] 2.3 [1]

نفرض أن T مؤثر خطي محدود علي H ، الفضاء الجزئي $M \subseteq H$ لا متغير تحت T إذا وفقط إذا كان الفضاء الجزئي $M^{\perp}$ يكون لا متغير تحت T^* .

مبرهنة[15] 3.3 [1]
الفضاء الجزئي $M \subseteq H$ يختزل المؤثر T إذا وفقط إذا كان M لا متغير تحت T و T^* .

ملاحظة : الفضاء الذاتي للمؤثر الخطي T يكون فضاء جزئي لامتغير تحت هذا المؤثر إذا كان $M_\lambda = \{u \in H: (T - \lambda I)u = 0\}$ ، ومنها يكون $T|M_\lambda$ هو عبارة عن λI في M_λ .

مبرهنة[16] 4.3 [1]
إذا كان T مؤثر ناظي علي فضاء هبرت H ، فإن كل فضاء ذاتي للمؤثر T يختزل هذا المؤثر ، وتكون الفضاءات الذاتية لهذا المؤثر متعامدة ثنائيا .

تعريف 5.3
المؤثر الخطي T علي فضاء هلبرت H يكون قابل للاختزال التام إذا كان كل فضاء جزئي M لا متغير تحت المؤثر T له فضاء جزئي لا متغير N مكمل له أي أن ($H = M \oplus N$) .

مثال 4
المؤثر $R(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ حيث $t \in \mathcal{R}$ ، مؤثر خطي حقيقي ثنائي البعد في $\mathcal{R}$ ، فضاءاته الجزئية تكون أحادية البعد متولدة بمتجهات القاعدة ومنها تكون هذه الفضاءات الجزئية مكملة لبعضها ، بذلك المؤثر R قابل للاختزال التام .

مثال 5
المؤثر $f: \{1, -1\} \longrightarrow \mathcal{R}^2$ معرف بالقيم $f_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ الفضاءات الجزئية الفعلية من $\mathcal{R}^2$ يمكن كتابتها علي الصورة : $W = span\{(x, y)\} : x, y \in \mathcal{R}$ وهو فضاء جزئي لا متغير يكمله الفضاء $W^{\perp} = span\{(-y, x)\}$ وهو فضاء جزئي لا متغير ، عليه يكون f مؤثر قابل للاختزال التام .

مثال 6
المؤثر الخطي $S(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ معرف علي $\mathcal{R}$ ، في هذا المؤثر نلاحظ أن الفضاء الجزئي اللامتغير هو فقط فضاء جزئي أحادي البعد متولد بمتجه القاعدة الأول ، حيث $W = span\{(1,0)\}$ فضاء جزئي لامتغير يكمله الفضاء $span\{(0,1)\}$ وهو فضاء جزئي متغير ، بذلك يكون المؤثر S غير قابل للاختزال التام .

ملاحظة : من الواضح أن كل مؤثر أحادي البعد يكون غير قابل للاختزال ، بمعني أن المؤثر T يكون غير قابل للاختزال إذا كانت الفضاءات الجزئية المختزلة هي $\{0\}$ و H فقط .

بدراسة طيف المؤثر الخطي وجدنا أن له بعض الخصائص الجبرية نعرض منها الخاصية الآتية :

مبرهنة[17] 5.3 [4]
لأي T_1 و T_2 فإن : $\sigma(T_1 \oplus T_2) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$.
وإذا كان M و N فضاءات جزئية لا متغيرة متكاملة تحت T فإن :
$\sigma(T) = \sigma(T|M) \cup \sigma(T|N)$

تعريف 6.3
إذا كان $T \in \beta(H)$ ، (حيث $\beta(H)$ جبر باناخ *Banach Algebra*) ، فإن الطيف الكامل للمؤثر (*The Full Spectrum*) يعرف بـ $\eta(\sigma(T))$ هو عبارة عن اتحاد $\sigma(T)$ مع المركبات المحدودة في $\rho(T)$.

المبرهنة التالية توضح أن طيف المؤثرات المقيدة للفضاءات الجزئية اللامتغيرة تكون مجموعة جزئية من الطيف الكامل لتلك المؤثرات ...

مبرهنة[18] 6.3 [4]

إذا كان $T \in \beta(H)$ و Mكان فضاء جزئي لا متغير تحت المؤثر T،
حيث أن $\partial\sigma(T) \subset \sigma_c(T)$ ، فإن : $\sigma(T|M) \subset \eta(\sigma(T))$.

البرهان : بما أن $\lambda \in \sigma_c(T|M)$ بذلك يكون هناك متسلسلة$\{x_n\}$ من المتجهات الأحادية تحقق أن

$\|(T-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0$

$\because \sigma_c(T|M) \subset \sigma_c(T) \Rightarrow \partial\sigma(T|M) \subset \sigma_c(T|M) \subset \sigma(T)$

إذا كان $\sigma(T|M)$ تحتوي نقاط المركبات غير المحدودة في $\rho(T)$ ، فإن $\partial\sigma(T|M)$ تمتلك مركبات غير محدودة $\rho(T)$ أيضاً ، ولكن هذا لا يكون .

المراجع :

1. Carl L. Devito : Functional Analysis and Linear operatore Theory , Addisson Wesley Publishing company , Inc 1990 .
2. (Erwin Kreyszig) : Introductory Functional Analysis with Application , John Wiley &Sons , Inc 1978.
3. (Gilbert helmberg) : Introduction To Spectral Theory In Hilbert Space , North Holland Publishing Company , Inc 1969 .
4. (Heydar Radjavi , Peter Rosenthal) : Invariant Subspace , Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1973 .
5. (K. Chandrasekhara Rao) : Functional Analysis, Alpha Science International Ltd , 2002 .
6. (Samuel Wolfensten): Introduction To Linear Algebra and Differential Equations .
7. (Sheldon Axler) : Linear Algebra Springer Verlag New York , Inc 1996 , 1997 .
8. (Vasile I. Istratescu) : Introduction To Linear Operator Theory ,Marcel Dekker , Inc1981 .
9. (Israel Gohberg , Peter Lancaster , Leiba Rodman) : Invariant Subspace of Matrices with Applications , Copyright © 2006 by the Society for Industrial and Applied Mathematics .
10. (Jonathan A. Noel) : The Invariant Subspace Problem , © Jonathan A. Noel 2011.
11. أساسيات الجبر الخطي : د. المبروك علي يونس ، د. محمد علي الأحمر ، دار الكتاب الجديد المتحدة – لبنان -2006 .
12. معجم الرياضيات (إنجليزي – فرنسي – عربي): د. علي مصطفي بن الأشهر ، أكاديماً للنشر ، لبنان – 1995 .

The Spectral Of Linear Operators In Invariant Subspaces

Somia Bakeer
Faculty of Science – Misurata university

Abstract:

This paper included a study of the Eigenvalues and Eigenvectors of linear operators , their definition , their properties and independence , and the identification of their Eigenspace , and when the subspace is a invariant subspace under the influence of linear operators , it retains all the properties of the original space , this space that often reduces the linear operators under certain conditions , We got to know its relationship to the spectrum , where we found that the reduced spectrum is a subset of the Full spectrum of the linear operator

Keywords: The Spectral Of Linear, the original space, Eigenspace